數學傳播　49卷2期, pp. 8-32

引潮力三講

楊維哲

獻詞與前言

這個演講是因爲閱讀了摯友 莫宗堅 伉儷的一篇有趣的文章[1] 而引起的。因此我也學他, 將本文獻給當年 台中一中 高三物理課的恩師 石克剛 先生[2]。

本文的第 0 節, 解釋了何謂引潮力場。

在第 1 節, 我們用初等幾何 (作圖) 的辦法解決了引潮力場的固有問題。

在第 2 節, 我們用簡單的 (微積分) 向量分析[3] 得到引潮位勢定理。

在第 3 節, 我們以月球與日球的數據, 做估計與比較。

在 莫文 中, 最主要的兩個計算議題是: (1) 引潮力的極大點, (2) 引潮力的靜水壓力。我們這兩節, 就對應地給以簡潔的補充。

雖然兩文互相獨立成篇, 但是我當然特別要謝謝[4] (拾貝齋主) 老莫。

0. 引潮力場

0.1. 向量

[**空間的坐標系**]: 假設我們在這個歐氏三維中已經設置好一個坐標系, 於是, 空間中的一點 P, 就可以寫爲 $P=(x,y,z)$。如果 $Q=(\xi,\eta,\zeta)$ 是另外一點, 我們就得出其間的 距離

$$\mathrm{dist}\,(P,Q) := \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}. \tag{1}$$

這就是 線段 $\overline{PQ}$ 之長 $|\overline{PQ}|$, 通常也就簡寫爲 $\overline{PQ}$。

[1]‘潮汐現象與沈括定律’, 數學傳播 48 卷 4 期 (pp. 22-34)。以下簡稱之爲 莫文。

[2] 石先生 在 台中一中 教了兩年書。老莫 受教是在 1957～1958。筆者早了一年受到恩惠。石先生 允許我: 上課可以低頭看課外的物理書, 習題不用做, 可以拿任何課外書的題目來做來交。

[3]記得我進大一時, 石先生 借給我一本美麗的精裝書, Philip Franklin: Methods of Advanced Calculus. 我大概讀了七成, 最少做了兩三百個磨練題, 因此對於向量分析與變分法的初等操作, 非常熟練。謝謝老師!

[4]一邊寫, 一邊就想起往時相聚的美麗時光。

我們以點 $Q=(\xi,\eta,\zeta)$ 爲中心, 以 r 爲半徑, 畫出一個 (閉) 球體 $\mathbb{B}(r;Q)$, 其表面記爲 $\mathbb{S}(r;Q)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}(r;Q) &:= \{P : \operatorname{dist}(P;Q) \le r\}\\ &\equiv \{(x,y,z) : (\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2 \le r^2\};\\ \mathbb{S}(r;Q) &:= \{P : \operatorname{dist}(P;Q) = r\}\\ &\equiv \{(x,y,z) : (\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2 = r^2\}.\end{aligned} \tag{2}$$

[**向量**]: 在物理科學中, 我們經常遇到具有方向性的物理量, 即向量。

我們把 x,y,z, 三軸方向上的單位向量, 依序記成 (W. Gibbs 的) $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$, 於是一個向量 $\mathbf{u}$, 就可以利用它的三個 成分 u,v,w, 而表達成

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}. \tag{3}$$

這向量的 (絕對) 值 (或'大小' magnitude, '量度') 就是

$$|\mathbf{u}| := \sqrt{u^2+v^2+w^2}. \tag{4}$$

只要 $|\mathbf{u}|>0$, ($\mathbf{u}$ 是個非零向量, $\mathbf{u}\neq 0$,) 我們就把 $\mathbf{u}$ 的 方向[5]解釋爲 單位向量

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{u}) := \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \equiv \frac{u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}. \tag{5}$$

因此, 任何一個 (非零) 向量 就是由它的 (方) 向 與 量 (度) (= (絕對) 值)
結合 (相乘) 而成的:

$$\mathbf{u} = \operatorname{sgn}(\mathbf{u}) * |\mathbf{u}| \equiv |\mathbf{u}| * \operatorname{sgn}(\mathbf{u}). \tag{6}$$

兩個非零向量 $\mathbf{u},\mathbf{p}$, 狹義地同向, 是指 $\operatorname{sgn}(\mathbf{u})=\operatorname{sgn}(\mathbf{p})$; 而 廣義地同向, 即'平行' $\mathbf{u}\parallel\mathbf{v}$, 則是指 $\operatorname{sgn}(\mathbf{u})=\pm\operatorname{sgn}(\mathbf{p})$。

零向量 0, 是 迷向的 (isotropic), 無方向可言, 我們可以規定:

$$\operatorname{sgn}(0) \equiv 0. \tag{7}$$

並且規定: 零向量和任何向量 $\mathbf{u}$, 都是'平行' (廣義地同向)。

對於空間中的兩點 $P=(x,y,z)$ 與 $Q=(\xi,\eta,\zeta)$, 我們就說其間的 位移向量 爲

$$\overrightarrow{PQ} := (\xi-x)\mathbf{i}+(\eta-y)\mathbf{j}+(\zeta-z)\mathbf{k}. \tag{8}$$

於是, 此兩點 P,Q 間的距離, 其實也就是位移向量的值 $|\overrightarrow{PQ}|$; 通常所說的「由 P 往 Q 的方向」, 就是位移向量的方向 $\operatorname{sgn}(\overrightarrow{PQ})$。

[5] direction. 記號 sgn = signum. (用萬國音標的讀法!) 對於一維的向量, 即實數 x, 其 方向 就是其 正負號 $\operatorname{sgn}(x)\equiv\frac{x}{|x|}$.

[**規約**]: 我們用 $O=(0,0,0)$ 表記原點。於是我們經常就可以把點 P 和向量 $\overrightarrow{OP}$ 混爲一談。尤其是:

$$\mathrm{sgn}(P) := \mathrm{sgn}(\overrightarrow{OP}). \tag{9}$$

0.2. 作用在質粒集團上的一股勢力

[**質粒的集團**]: 這一小節我們要討論的問題是:「集團中的個體之行爲, 相對於整個集團來說, 是否勻諧?」更精確地問,「個體相對於整個集團來說的崎差, 如何定義?」

其實這樣的問題, 在 運動學 (kinematics) 中, 已經很自然地出現過, 而且有簡單自然的答案。此地就做一點點複習, 順便介紹我們 (並不流行) 的記號。

考慮由許多個 質粒 (particle) 所集成的一個 (有窮, 不空的) 集合 A。以下我們用 i 當作 A 中的活動的元素之標籤。我們把一個質粒 $i\in A$ 的質量記爲 m_i。於是記集團 A 的

$$\underline{\text{總質量}}\ \text{爲}\quad M := \sum_{i\in A} m_i; \tag{10}$$

現在我們把時間凍結在某一個時刻, 記 那一瞬間 質粒 i 的 位置 爲 $\mathbf{x}_i$, 速度 爲 $\mathbf{v}_i$。

於是我們就說, (同樣 在這一瞬間,) 集團 A 的

$$\begin{aligned}
\text{平均位置}\ \mathbf{x}_A &:= \tfrac{1}{M}\sum_{i\in A} m_i * \mathbf{x}_i,\\
\text{平均速度}\ \mathbf{v}_A &:= \tfrac{1}{M}\sum_{i\in A} m_i * \mathbf{v}_i,\\
\hline
\text{總位置矩}\ \mathbf{x}^A &:= \sum_{i\in A} m_i * \mathbf{x}_i \equiv M * \mathbf{x}_A,\\
\text{總動量}\ \mathbf{v}^A &:= \sum_{i\in A} m_i * \mathbf{v}_i \equiv M * \mathbf{v}_A\text{。}
\end{aligned} \tag{11}$$

我們先解釋一下: 前兩個詞是很常見的。它們是很自然的概念。要點當然是: 所謂平均, 是 加權 (weighted)[6]平均, 是「要把'質量'的因素, '加進來'考慮」的意思。

後兩個詞, 質粒 i 的 位置矩 爲 $m_i * \mathbf{x}_i$, 這是非常罕見罕聞的一詞, 但質粒 i 的 動量 爲 $m_i * \mathbf{v}_i$, 這是很熟悉的。我們'複習' (介紹) 這兩個詞, 只不過是用它們來表達

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_A &= \mathbf{x}^A \div M;\\
\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}^A \div M;
\end{aligned} \tag{12}$$

[**崎差**]: 有了平均的定義之後, 於是我們定義: 質粒 i 相對於整個集團 A 而言的

$$\begin{aligned}
\text{崎差位置}\ (\vartriangle_A \mathbf{x})_i &:= \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_A;\\
\text{崎差速度}\ (\vartriangle_A \mathbf{v})_i &:= \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_A;
\end{aligned} \tag{13}$$

---

[6]權=重=質量 (mass), 在漢文中, 原本是混用的。

在普通物理學裡面, 平均位置, 平均速度, 的'平均'這個形容詞也常常被形容詞 質心的 (mass-center) 代替。而'崎差位置'與 '崎差速度' 其實就是「相對於質心的位置」, 與「相對於質心的速度[7]」。

[**一股勢力的崎攤**]: 假設有某個勢力, 作用在質粒集團 A 之上。意思就是它對於質粒 $i \in A$ 就給以力量 $m_i * \mathfrak{g}_i$。

依我們這樣的記號, $\mathfrak{g}_i$ 的意思是:「對於質粒 i, 每單位質量的施力」。所以, 在量綱上, 它是'加速度', (用的國際單位是 '牛頓每公斤'), 而不是力 (用的國際單位是 '牛頓')。所以, 質粒集團 A 所受自那個來源的

$$\begin{aligned} \underline{\text{總力}}\ \text{爲} \quad \mathfrak{g}^A &:= \sum_{i \in A} (m_i * \mathfrak{g}_i); \\ \text{每單位質量受的}\ \underline{\text{平均'力'爲}} \quad \mathfrak{g}_A &:= \frac{\mathfrak{g}^A}{M}. \end{aligned} \tag{14}$$

如果將總力量 $\mathfrak{g}^A$ 依照質量來公平比例分攤的話, 質粒 i (勻平地) 攤受到的力量, 應該是 $\frac{m_i}{M} * \mathfrak{g}^A$。然而它實際上受到的力量則是 $m_i * \mathfrak{g}_i$, 這就算出兩者間的差額 (=「不公平地分配到的力」)

$$m_i * (\Delta_A \mathfrak{g})_i := m_i * \mathfrak{g}_i - \frac{m_i}{M} * \mathfrak{g}^A = m_i * (\mathfrak{g}_i - \mathfrak{g}_A).$$

將這個差額, 除以 m_i:

$$(\Delta_A \mathfrak{g})_i := \mathfrak{g}_i - \mathfrak{g}_A \equiv \mathfrak{g}_i - \frac{\mathfrak{g}^A}{M}. \tag{15}$$

這是質粒 i 每單位質量 所受到的 '力'之崎差 部分, 簡稱爲這股勢力的 崎差力。

[**記號**]: 以下我們就用

$$m \oslash \mathbf{x} \quad \text{表示: 將質量 } m \text{ 放置於 } \mathbf{x} \text{ 處, 所得的一個抽象的質粒。} \tag{16}$$

然後, 我們就把前此講過的質粒集團 A, 寫成

$$A \equiv \sum_{i \in A} \quad m_i \oslash \mathbf{x}_i. \tag{17}$$

本來並不需要新的記號, 單單寫成集合

$$A \equiv \{m_i \oslash \mathbf{x}_i : i \in A\}$$

就好了。但是現在我們規定, (17) 式的右側, 含括了一個 位置的明辨性 條件:

$$\text{「}i \text{ 不同, } \mathbf{x}_i \text{ 就不同。」} \tag{18}$$

[7] 以下, 我們就不再談論速度了! 因爲本文並不討論動力學。記號 $\mathbf{v}$ 從此恢復自由!

這體現了 物之理[8]:「同時同地, 不可以有兩物共存」。

把集團中所有質粒的位置之集合, 稱爲 (在那瞬間,) A 的 載體 (carrier)

$$\mathrm{carr}(A) := \{\mathbf{x}_i : i \in A\}. \tag{19}$$

所以, 位置的明辨性, 意思就是: 把 $i \in A$ 變換成 $\mathbf{x}_i \in \mathrm{carr}(A)$ 的映射 $\mathbf{x}_\star$, 是由 A 到 $\mathrm{carr}(A)$ 的一個 對射 (bijection)。注意到: 由定義, 載體 $\mathrm{carr}(A)$ 只與這個映射 $\mathbf{x}_\star$ 有關, 而與 $m_\star$ 無關。這裡, $m_\star$ 指的是由 $i \in A$, 得到 m_i 的 秤重映射[9]。但是: 平均位置 $\mathbf{x}_A$ 就同時牽涉到位置映射 $\mathbf{x}_\star$ 與秤重映射 $m_\star$。最後, 我們定義: 集團 A 的 湊聚 質粒爲[10]

$$\hat{A} := M \oslash \mathbf{x}_A. \tag{20}$$

[**兩個質粒集團間的簡單交涉作用**]: 現在假設: 在上述的質粒集團 A 之外, 還有一個質粒集團

$$B \equiv \sum_{j \in B} \mu_j \oslash \mathfrak{x}_j. \tag{21}$$

我們要求: 不但 B 自身也要滿足位置的明辨性條件, 而且兩個集團的載體也是互斥的:

$$\mathrm{carr}(A) \cap \mathrm{carr}(B) = \emptyset. \tag{22}$$

於是 Newton 就思考這兩個集團間可能的 簡單交涉 作用。意思是:
B 的一個質粒 $j \equiv \mu_j \oslash \mathfrak{x}_j$ 對於 A 的一個質粒 $m_i \oslash \mathbf{x}_i$ 的作用力是

$$\mathbf{N}(m_i \oslash \mathbf{x}_i; \mu_j \oslash \mathfrak{x}_j) \equiv (m_i \mu_j) * \mathbf{n}(\mathbf{x}_i; \mathfrak{x}_j). \tag{23}$$

也就是說, 此作用力, 與兩個質粒的質量都成正比, 而且剩下來的因子 $\mathbf{n}(\mathbf{x}_i; \mathfrak{x}_j)$ 只與兩個質粒的位置有關。

當然我們知道: 依據 Newton 的 (作用與反作用的) 第三定律, 這個因子有 交錯性:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}_i; \mathfrak{x}_j) = -\mathbf{n}(\mathfrak{x}_j; \mathbf{x}_i). \tag{24}$$

然後 Newton 要求此種交涉作用是 可加的 (additive), 也就是說:
整個集團 B 對於 A 的單一個質粒 $m_i \oslash \mathbf{x}_i$ 的作用力是

$$m_i * \mathfrak{g}_i := \mathbf{N}(m_i \oslash \mathbf{x}_i; B) = \sum_{j \in B} \mathbf{N}(m_i \oslash \mathbf{x}_i; \mu_j \oslash \mathfrak{x}_j) \equiv \sum_{j \in B} (m_i \mu_j) * \mathbf{n}(\mathbf{x}_i; \mathfrak{x}_j). \tag{25}$$

[8]既然「時間已經凍結在那一瞬間」, 這個條件 (18) 式, 非常自然!

[9]我們是要求 $m_i > 0$。

[10]「將集團總質量放置在質心位置處, 所得的抽象質粒」。但質心位置不必在載體內。

因此, 對於此質粒 i, 它的每單位質量所受的力是

$$\mathfrak{g}_i \equiv \sum_{j\in B} \mu_j * \mathbf{n}(\mathbf{x}_i; \mathfrak{x}_j). \tag{26}$$

整個集團 B 對於集團 A 的所有的質粒的作用力總和則是

$$\mathfrak{g}^A := \mathbf{N}(A;B) \equiv \sum_{i\in A}\sum_{j\in B}(m_i\mu_j) * \mathbf{n}(\mathbf{x}_i; \mathfrak{x}_j). \tag{27}$$

依照 (15) 式, 崎差力 $\vartriangle_A \mathfrak{g}$ 的計算, 就歸結到 (26), (27) 這兩個式子中的和分。這就引起了

[Newton **的大哉問**]:

丙 ((27) 式?) A, B 間的力, 等於把兩者各自湊聚成單一質粒時的力?

$$\mathbf{N}(A;B) \stackrel{?}{=} \mathbf{N}(\hat{A};\hat{B}) \equiv MW\mathbf{n}(\mathbf{x}_A;\mathfrak{x}_B). \tag{28}$$

甲 ((25) 式?) B 施之於一質粒的力, 會等於其湊聚質粒 $\hat{B}$ 單個之所施?

$$\mathbf{N}(m\circ\mathbf{x};B) \stackrel{?}{=} \mathbf{N}(m\circ\mathbf{x};\hat{B}). \tag{29}$$

乙 A 受自於一質粒的引力, 會等於湊聚質粒 $\hat{A}$ 之所受?

$$\mathbf{N}(A;\mu\circ\mathfrak{x}) \stackrel{?}{=} \mathbf{N}(\hat{A};\mu\circ\mathfrak{x}). \tag{30}$$

這完全類似問題甲, 只是顛倒'施'與'受'的方向。要點是: 如果甲乙兩個疑問都有肯定的解答, 當然丙就被解決了。

當然 Newton 想得更爲深入, 把題目修改成更有意義:

甲': 找出一個針對集團 B 的充分條件, 使得: (我們約掉因數 m,)

$$\sum_{j\in B} \mu_j\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x}_j) = W\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x}_B). \tag{31}$$

乙': 找出一個針對集團 A 的充分條件, 使得: (我們約掉因數 μ,)

$$\sum_{i\in A} m_i\mathbf{n}(\mathbf{x}_i;\mathfrak{x}) = M\mathbf{n}(\mathbf{x}_A;\mathfrak{x}). \tag{32}$$

丙': 找出一個針對兩集團 A, B 的充分條件, 使得:

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in B} m_i\mu_j\mathbf{n}(\mathbf{x}_i;\mathfrak{x}_j) = MW\mathbf{n}(\mathbf{x}_A;\mathfrak{x}_B). \tag{33}$$

0.3. 作用在物體上的力

這一小節, 我們把前述有關於質粒集團間的概念, 轉譯成有關於物體的概念。基本上這是用積分 (integration) 代替和分 (summation)。

[**物體**]: 以下假設: $\mathcal{A}$ 是三維空間的一個有界閉領域, $\rho(\mathbf{x})$ 是定義在其上的一個連續 (當然有界) 的 (狹義) 正值的函數。那麼以密度 ρ 把質量分佈在 $\mathcal{A}$ 上, 我們就得到了一個

$$\begin{aligned}
\text{(三維) 物體}\quad & A := \int_{\mathcal{A}} [\rho(\mathbf{x}) \circ \mathbf{x}] d^3\mathbf{x}; \\
\text{而其載體記爲}\quad & \mathrm{carr}(A) := \mathcal{A}; \\
\text{物體 } A \text{ 的總質量爲}\quad & M := \int_{\mathcal{A}} \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}; \\
A \text{ 的平均位置爲}\quad & \mathbf{x}_A := \frac{1}{M}\int_{\mathcal{A}} \mathbf{x} * \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}; \\
A \text{ 的湊聚質粒爲}\quad & \hat{A} := M \oslash \mathbf{x}_A.
\end{aligned} \tag{34}$$

[**注意**]: 把 $\mathcal{A}$ 改爲三維空間中的一個緊緻曲面, (具緣或不具緣都可以,) 而 $\rho(\mathbf{x})$ 是定義在其上的一個連續且 (狹義) 正值的函數, 又把 $d^2\mathbf{x}$ 解釋爲曲面上的微分面積, 於是我們就得到一個二維 物體

$$A := \int_{\mathcal{A}} [\rho(\mathbf{x}) \circ \mathbf{x}] d^2\mathbf{x}. \tag{35}$$

而下面的敘述幾乎都照樣成立。當然在必要時, 我們會小心地分別敘述。

首先, 對於 $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, 我們 (參考 (13) 式,) 定義其處之

$$\text{崎差位置}\quad (\vartriangle_A \mathbf{x})_i := \mathbf{x} - \mathbf{x}_A.$$

[**作用於物體上的力**]: 假設有某個勢力來源, 作用於物體 A 之上:

$$\text{它對於 } \mathbf{x} \in \mathcal{A} \text{ 處的微分質量 } \rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}\text{, 施力 } \mathfrak{g}(\mathbf{x}) * \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \tag{36}$$

這裡的 $\mathfrak{g}(\mathbf{x})$ 是「力除以質量」, (force per unit mass), 其實具有 加速度 的量綱。但是我們就把這股勢力稱爲:「作用在物體 A 上的勢'力' $\mathfrak{g}$」。而我們定義這股勢力的

$$\begin{aligned}
\text{合力}\quad & \mathfrak{g}^A := \int_{\mathcal{A}} \mathfrak{g}(\mathbf{x}) * \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}; \\
\text{平均'力'}\quad & \mathfrak{g}_A := \frac{\mathfrak{g}^A}{M} \equiv \frac{1}{M}\int_{\mathcal{A}} \mathfrak{g}(\mathbf{x}) * \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}; \\
\text{崎差'力'}\quad & (\vartriangle_A \mathfrak{g})(\mathbf{x}) := \mathfrak{g}(\mathbf{x}) - \mathfrak{g}_A.
\end{aligned} \tag{37}$$

如果將總力量 $\mathfrak{g}^A$ 依照質量來公平分攤的話, 位於 $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ 處的微分質量 $\rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$, 勻平攤受到的力量應該是 $\frac{\mathfrak{g}^A}{M} * \rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$, 而它實際上受到的力, 則是 $\mathfrak{g}(\mathbf{x}) * \rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$; 這就算出差額

$$\mathfrak{g}(\mathbf{x}) * \rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} - \frac{\mathfrak{g}^A}{M} * \rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = (\vartriangle_A \mathfrak{g})(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x};$$

這就是崎差'力'一詞之由來。

0.4. 兩物體間的 Newton 引力

[**兩物體間的簡單交涉**]: 現在起假設: 有兩個物體 A 與 B。第一個物體 $A := \int_{\mathcal{A}} [\rho_1(\mathbf{x}) \circ \mathbf{x}] d^3\mathbf{x}$; 是如 (28), (29) 兩式所描寫, 但是要把彼處之 ρ 改爲此地之 ρ_1, 而其總質量爲 M, 平均位置爲 $\mathbf{x}_A$。另外的

$$\begin{aligned} \text{第二個物體} \quad & B := \int_{\mathcal{B}} [\rho_2(\mathfrak{x}) \circ \mathfrak{x}] d^3\mathbf{x}; \\ B \text{ 的總質量爲} \quad & W \equiv \int_{\mathcal{B}} \rho_2(\mathfrak{x}) d^3\mathfrak{x}; \\ B \text{ 的平均位置爲} \quad & \mathfrak{x}_B \equiv \frac{1}{W} \int_{\mathcal{B}} \mathfrak{x} * \rho_2(\mathfrak{x}) d^3\mathfrak{x}; \\ B \text{ 的湊聚質粒} \quad & \hat{B} \equiv (W \circ \mathfrak{x}_B). \end{aligned} \tag{38}$$

我們還假設: A, B 的兩個載集 $\text{carr}(A) \equiv \mathcal{A}$ 與 $\text{carr}(B) \equiv \mathcal{B}$ 互斥:

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset. \tag{39}$$

要描寫兩物體 A 與 B 間的簡單交涉, 我們先把 (25) 式翻譯如下:

整個集團 B 對於 A 的微分的質粒 $\rho_1(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} \oslash \mathbf{x}$ 的作用力是

$$\rho_1(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} * \mathfrak{g}(\mathbf{x}; B) := \mathbf{N}(\rho_1(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} \oslash \mathbf{x}; B) = \rho_1(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} * \int_{\mathcal{B}} \mathbf{n}(\mathbf{x}; \mathfrak{x})\rho_2(\mathfrak{x})d^3\mathfrak{x}. \tag{40}$$

因此, 此微分的質粒, 每單位質量所受的力是 (參看 (26) 式)

$$\mathfrak{g}(\mathbf{x}; B) \equiv \int_{\mathcal{B}} \mathbf{n}(\mathbf{x}; \mathfrak{x})\rho_2(\mathfrak{x})d^3\mathfrak{x}. \tag{41}$$

整個集團 B 對於集團 A 的總和力是 (參看 (27) 式)

$$\mathfrak{g}^A(; B) := \mathbf{N}(A; B) \equiv \int_{\mathcal{A}} \rho_1(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} * \int_{\mathcal{B}} \mathbf{n}(\mathbf{x}; \mathfrak{x})\rho_2(\mathfrak{x})d^3\mathfrak{x}. \tag{42}$$

根據 (37) 式, B 施之於 A 的崎差力場

$$(\vartriangle_A \mathfrak{g})(\mathbf{x}; B) := \mathfrak{g}(\mathbf{x}; B) - \mathfrak{g}_A(; B)$$

之計算, 就歸結到上面最後這兩個式子中的積分。

[**萬有引力**]: Newton 假定: 質粒 $\mu\circ\mathfrak{x}$ 對質粒 $m\circ\mathbf{x}$ 所施的引力是

$$\mathbf{N}(m\circ\mathbf{x};\mu\circ\mathfrak{x})\equiv\frac{G*m*\mu}{|\mathfrak{x}-\mathbf{x}|^2}*\mathrm{sgn}(\mathfrak{x}-\mathbf{x})=(m\mu)*\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x}).\tag{43}$$

引力的方向 $\mathrm{sgn}(\mathfrak{x}-\mathbf{x})$ 是由 $\mathbf{x}$ 向 $\mathfrak{x}$。引力的大小是與兩個質量都正比, 而與距離的平方反比。比例常數是 (Newton 的 萬有引力常數)

$$G\equiv 6.673*10^{-11}\text{米}^3/\text{公斤 秒}.\tag{44}$$

注意到, 上式中, 我們已經引入 純幾何的

$$\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x}):=\frac{G}{|\mathfrak{x}-\mathbf{x}|^2}*\mathrm{sgn}(\mathfrak{x}-\mathbf{x}).\tag{45}$$

[Newton **的問題**]: 將 (31), (32), (33) 諸式翻譯過來, 問題就是:

甲' 找出 很好的 物體 $B=\int_{\mathcal{B}}\rho_2(\mathfrak{x})\oslash\mathfrak{x}d^3\mathfrak{x}$, 使得:

$$\int_{\mathcal{B}}\rho_2(\mathfrak{x})\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x})d^3\mathfrak{x}=W\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x}_B)\equiv\Big(\int_{\mathcal{B}}\rho_2(\mathfrak{x})d^3\mathfrak{x}\Big)*\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x}_B).\tag{46}$$

乙' 找出 很好的 物體 $A=\int_{\mathcal{A}}\rho_1(\mathbf{x})\oslash\mathbf{x}d^3\mathbf{x}$, 使得:

$$\int_{\mathcal{A}}\rho_1(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x})d^3\mathbf{x}=M\mathbf{n}(\mathbf{x}_A;\mathfrak{x})\equiv\Big(\int_{\mathcal{A}}\rho_1(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}\Big)*\mathbf{n}(\mathbf{x}_A;\mathfrak{x}).\tag{47}$$

丙' 於是, 對於 很好的 兩個物體 A 與 B 如上, 就會有:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{B}}\rho_1(\mathbf{x})\rho_2(\mathfrak{x})\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x})d^3\mathfrak{x}d^3\mathbf{x}&=MW\mathbf{n}(\mathbf{x}_A;\mathfrak{x}_B)\\&\equiv\Big(\int_{\mathcal{A}}\rho_1(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}\Big)*\Big(\int_{\mathcal{B}}\rho_2(\mathfrak{x})d^3\mathfrak{x}\Big)*\mathbf{n}(\mathbf{x}_A;\mathfrak{x}_B).\end{aligned}\tag{48}$$

[Newton **球體積分定理**]: 假設: 常數 ρ_1,ρ_2,r_1,r_2 都是正的, 兩個定點 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的距離 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|>r_1+r_2$。那麼

$$\begin{aligned}A&=\int_{B(r_1;\mathbf{a})}\rho_1\oslash\mathbf{x}d^3\mathbf{x};\\B&=\int_{B(r_2;\mathbf{b})}\rho_2\oslash\mathfrak{x}d^3\mathfrak{x};\end{aligned}\tag{49}$$

都是 很好的 物體, 而且 $\mathbf{x}_A=\mathbf{a};\quad\mathfrak{x}_B=\mathbf{b}$, 而 (46)–(48) 式都是恆等式[11]。

$$\mathfrak{g}(\mathbf{x};B)\equiv\int_{B(r_2;\mathbf{b})}\rho_2\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x})d^3\mathfrak{x}=W*\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathbf{b}).\tag{50}$$

---

[11]注意到: 體積 $|\mathbb{B}(r_1;\mathbf{a})|=\frac{4\pi}{3}r_1^3$, $|\mathbb{B}(r_2;\mathbf{b})|=\frac{4\pi}{3}r_2^3$, 因而質量 $M=\rho_1\frac{4\pi}{3}r_1^3$, $W=\rho_2\frac{4\pi}{3}r_2^3$。

$$\frac{1}{\mu}\mathbf{N}(A;\mu\circ\mathfrak{x}) \equiv \int_{B(r_1;\mathbf{a})}\rho_1\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x})d^3\mathbf{x} = M*\mathbf{n}(\mathbf{a};\mathfrak{x}). \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(A;B) \equiv &\int_{B(r_1;\mathbf{a})}\int_{B(r_2;\mathbf{b})}(\rho_1*\rho_2)*\mathbf{n}(\mathbf{x};\mathfrak{x})d^3\mathbf{x}d^3\mathfrak{x}\\ =&(M*W)*\mathbf{n}(\mathbf{a};\mathbf{b}).\end{aligned} \tag{52}$$

[**註解**]: 事實上, 這個 超卓的定理 (The Superb Theorem)[12], 是 Newton 遲至 1685 的初春, 才完成證明的。稍微精進一點點的話, 就得到 Newton 球殼層定理。它的意義是說: 上述的「密度函數 ρ_1, ρ_2, 爲常數函數」, 不是必要條件。其實,「只要它們是 球狀對稱的, 就夠了」。這在物理應用上非常有意義!

定理的主要等式爲 (46)=(50), (或者顛倒角色所成的 (47)=(51),) 出現在 原理 卷 1 命題 74。次要等式 (48)=(52) 出現在 原理 卷 3 命題 8。

比球殼層定理更爲激進些的 球面定理[13] 出現在 原理 卷 1 命題 71, 當然這是指: $\mathbf{x}$ 在球外[14]。

[**星球**]: 滿足了上述 Newton 定理的假設的物體稱爲 星球。以下我們假設: A 與 B 都是星球。

[**星球** A =**地球**]: 其載體的球心 $\mathbf{x}_A \equiv \mathbf{a} \equiv O =$ 原點, 半徑爲 $r_1 \equiv R$; 這個 (閉) 球就簡單寫爲 $\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}(R;O)$, 其表面也就簡寫爲 $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S}(R;O)$。我們先明確固定三個常數: G, R, M.

$$\begin{aligned}\text{萬有引力常數} \quad & G \approx 6.673*10^{-11}\text{米}^3/\text{公斤}*\text{ 秒};\\ \text{地球質量} \quad & M \approx 5.974*10^{24}\text{公斤};\\ \text{地球半徑} \quad & R \approx 6.378*10^{6}\text{米}。\end{aligned}$$

因此, 地表的重力加速度 是

$$g \equiv \frac{G*M}{R^2} \approx 9.8 \ \text{米}/\text{秒}^2。$$

[**星球** B]: 載體是 $\mathcal{B} \equiv \mathbb{B}(r_2, \mathfrak{x}_B)$。其半徑 r_2 在以下就不用再出現了。我們把星球 B 的平均位置 ξ_B 即 $\mathcal{B}$ 的球心, 記爲 $Q \equiv \mathbf{b}$, 把兩個球心的距離, 用地球半徑來比, 這個比 α 稱爲星球 B 的 據比。

$$|\overline{OQ}| \equiv |\mathbf{b}| = \alpha * R. \tag{53}$$

[12]在 (自然哲學的數學) 原理 出版後兩百年的紀念會上, Glaisher 的用詞。

[13]意思是: 把球體 $\mathbb{B}$ 改爲球面 $\mathbb{S}$, (而 $d^3\mathbf{x}$ 改爲 $d^2\mathbf{x}$ 等,) 把均勻的體密度, 改爲均勻的面密度。結論仍然成立。

[14]球內的情形, 與我們這裡的討論沒有關涉。出現在 原理 卷 1 命題 70, 這是指: 當 ($\mathbf{x}$ 在球內,) $|\mathbf{x}-\mathbf{b}| < r_2$ 時, (46) 式右側要改成零。

我們把星球 B 的質量 W 用地球質量 M 來比, 這個比 β 稱爲星球 B 的 <u>權比</u>。

$$W \equiv \beta * M. \tag{54}$$

於是重新寫下, <u>由 B 所生的</u> 最重要的兩個場與一個常數。星球 B 所生的 <u>引力場</u> 是

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x}; B) = W * \mathbf{n}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) \equiv \frac{g\beta R^2}{|\mathbf{b}-\mathbf{x}|^2} * \operatorname{sgn}(\mathbf{b}-\mathbf{x}). \tag{55}$$

星球 B 對地球 A 上 (每單位質量的) 的引力之平均爲 (常數!)

$$\mathbf{g}(O) \equiv \mathbf{g}(O; B) = W * \mathbf{n}(O; \mathbf{b}) = \frac{\beta g}{\alpha^2} * \operatorname{sgn}(\mathbf{b}). \tag{56}$$

星球 B 在星球 A 上的 <u>引潮力場</u> 爲

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := (\vartriangle_A \mathbf{g})(\mathbf{x}; B) = g\beta R^2 * \left(\frac{\operatorname{sgn}(\mathbf{b}-\mathbf{x})}{|\mathbf{b}-\mathbf{x}|^2} - \frac{\operatorname{sgn}(\mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2} \right). \tag{57}$$

[**規約**]: 以下,「分號後面附寫 B」就省略掉! 用據比 α 與權比 β 來表達, 則:

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}(A; B)| &= \frac{\beta}{\alpha^2} * Mg; \\ |\mathbf{g}(O)| &= \frac{\beta}{\alpha^2} g. \end{aligned} \tag{58}$$

由平方反比律, 我們馬上得到:

$$\frac{|\mathbf{g}(P)|}{|\mathbf{g}(O)|} = \frac{\overline{OQ}^2}{\overline{PQ}^2}; \tag{59}$$

以下, 我們在強調幾何性的時候, 常常要把 $\mathbf{b}$ 轉換成 Q, 把 $\mathbb{S}$ (或 $I\!\!B$) 上的點 $\mathbf{x}$ 轉換成 P。

那麼 (56) 式, (55) 式, (57) 式, (依此順序!) 成爲

$$\mathbf{g}(O) = \left(\frac{\beta}{\alpha^2} g\right) * \operatorname{sgn}(\overrightarrow{OQ}). \tag{60}$$

$$\mathbf{g}(P) = \left(\frac{\beta}{\alpha^2} g\right) * \frac{\overline{OQ}^2}{\overline{PQ}^2} * \operatorname{sgn}(\overrightarrow{PQ}). \tag{61}$$

$$\mathbf{f}(P) = \mathbf{g}(P) - \mathbf{g}(O) = \left(\frac{\beta}{\alpha^2} g\right) * \left(\frac{\overline{OQ}^2}{\overline{PQ}^2} * \operatorname{sgn}(\overrightarrow{PQ}) - \operatorname{sgn}(\overrightarrow{OQ})\right). \tag{62}$$

1. 引潮力場的固有問題

1.1. 引潮力場的固有點

[**鉛垂方向**]: 對於地表面上的一點 P, '鉛垂方向'這個詞有一點點曖昧。也許是指 '鉛垂向上'的 $\mathrm{sgn}(P) \equiv \mathrm{sgn}(\overrightarrow{OP})$, 也許是指 '鉛垂向下'的 $\mathrm{sgn}(-\overrightarrow{OP}) \equiv \mathrm{sgn}(\overrightarrow{PO}) = -\mathrm{sgn}(P)$。

[**固有點**]: 當 $P \in \mathbb{S}$ 點處的引潮力 $\mathbf{f}(P)$ 是在'鉛垂方向'時:

$$(\spadesuit :) \begin{pmatrix} \mathbf{f}(P) \parallel \overrightarrow{OP}, \text{或即, 存在一個實數 } \lambda, \text{ 使得} \\ \mathbf{f}(P) = \lambda * \mathrm{sgn}(P) \equiv \lambda * \mathrm{sgn}(\overrightarrow{OP}), \end{pmatrix} \tag{63}$$

我們就說: P 是引潮力場的 <u>固有點</u>, λ 是其對應的 (引潮力) <u>固有值</u>。$\theta := \angle QOP$ 是其對應的 <u>固有餘緯度</u>。這一節中, 我們要解出 ($\spadesuit$) 中, 全部的 <u>固有問題</u>。

先注意對稱性。稱地星的連心線 OQ 爲 <u>(對星的) 極軸</u>。在繞極軸的迴轉之下, 引潮力場是不變的, 那麼, 所有上述這些涉及'固有'的概念, 在繞極軸的迴轉之下, 顯然也是不變的。

特別地說: 如果某一點 P_0 是個固有點, 那麼, 將它繞極軸迴轉任何角度 φ 所得的點 P_0^{φ}, 顯然也是固有點。這樣子說, 只要有一個固有點 P_0, 就有一圈的, 無窮多的固有點。

[**特異的固有點**]: 最後那句話唯一的瑕疵是: 如果固有點是在迴轉軸上, 那麼它是特異的 (singular) 固有點, 因爲它怎麼迴轉都還是自己。

極軸與地球面 $\mathbb{S}$ 有兩個交點, 即 <u>近星點</u> P_1 與 <u>遠星點</u> P_2, 它們 (幾乎不得不) 都是引潮力場的固有點。事實上, 這很容易計算!

[**規約**]: 從此開始, (重獲自由的) 足碼 j 只取值 1 或 2。

因爲

$$\overline{OQ} = \alpha R; \overline{P_1Q} = (\alpha - 1)R, \overline{P_2Q} = (\alpha + 1)R. \tag{64}$$

那麼, 由平方反比定律 (59) 式, 及 (58) 式, 星球在 $P_j, (j = 1, 2,)$ 處的引力之大小是

$$|\mathfrak{g}(P_1)| = \frac{g\beta}{(\alpha - 1)^2}; \quad |\mathfrak{g}(P_2)| = \frac{g\beta}{(\alpha + 1)^2}; \tag{65}$$

注意到 $\overrightarrow{OP_j}$ 與 $\overrightarrow{P_jQ}$ 的方向:

$$\mathrm{sgn}(\overrightarrow{P_2Q}) = \mathrm{sgn}(\overrightarrow{P_1Q}) = \mathrm{sgn}(\overrightarrow{OQ}) = \mathrm{sgn}(\overrightarrow{OP_1}) = -\mathrm{sgn}(\overrightarrow{OP_2});$$

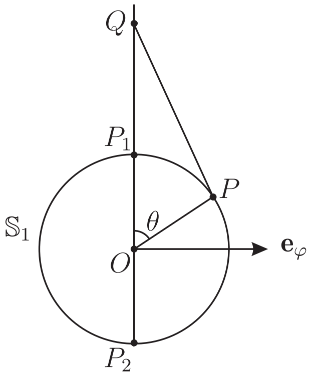
於是, 固有點 P_j 處的引潮力固有值 λ_j 與固有餘緯度 θ_j 都知道了:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(P_j) &= \lambda_j * \operatorname{sgn}(\overline{OP_j}), & \angle QOP_j &= \theta_j; \\ \lambda_1 &= g\beta * \left(\frac{1}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right); & \theta_1 &= 0^\circ; \\ \lambda_2 &= g\beta * \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha+1)^2}\right); & \theta_2 &= 180^\circ. \end{aligned} \tag{66}$$

1.2. 平面幾何的模擬

[**幾何上的相似性**]: 我們先問: 如何把地球 $\mathbb{B}$, 地心 O, 星 (心) Q 以及點 P 等等東西的純粹幾何的關係, 表達出來 ?

立體幾何學我們不熟悉. 很難想像如何畫圖思考。所以最簡易的著手法, 就是把問題侷限成平面幾何學的題材。



比例尺度

長度: $\overline{OQ} \equiv \alpha * R$

除權力: $\overline{OQ} \equiv \frac{\beta}{\alpha^2} * g$

我們在此就先假設 P 不在 OQ 連線上, 那麼, 通過不共面的這三點 O, Q, P, 就可畫出唯一的一個平面 $\mathbb{P}$。

平面 $\mathbb{P}$ 與地球面 $\mathbb{S}$ 的交截就是一個圓 $\mathbb{S}_1$, 稱爲 地圓。它和連線 OQ ((對星的) 極軸) 的兩個交點是近星點 P_1 與遠星點 P_2。所有以上談到的諸點 O, Q, P, P_1 與 P_2, 以及圓 $\mathbb{S}_1$, 都是物理真實平面 $\mathbb{P}$ 中的幾何物件。

現在就可以在桌子上, 放一張白紙。我們把這張紙, 叫做平面 $\mathbb{P}'$。然後在白紙 $\mathbb{P}'$ 上, 以適當的大小位置, 畫出一個相似三角形

$$\triangle O'P'Q' \sim \triangle OPQ. \tag{67}$$

於是, 以 O' 爲心, 畫一個圓 $\mathbb{S}_1'$ 通過 P' 點。圓 $\mathbb{S}_1'$ 與直線 $O'Q'$ 有兩個交點 P_1', P_2', 取在 $\overline{O'Q'}$ 內的, 記爲 P_1'。

現在, 物理真實平面 $\mathbb{P}$ 中所有的我們有興趣的幾何物件, 在平面 $\mathbb{P}'$ 上, 都有對應的相似

物件, 都是加上了一撇。反過來說, $I\!P'$ 上的物件, 只要把撇號拿掉, 就成了 $I\!P$ 中的物件。

這張白紙平面 $I\!P'$ 其實就是上圖左。圖中所有的點的標記, 本來都應該加上撇號, 但是我們全部刪掉撇號!

我們就是以 加了撇的世界 去模擬 沒有撇的世界。在這個世界中的三點共一線, 就等於另一個世界中的三點共一線; 這一方的四點共圓, 在那一方對應的四點也就共圓。

或許更重要的是: 兩個平面上的幾何度量, 互相有 簡單的換算:

- 對應角的角度相等。
- 對應線段的長度有固定的比例。真實平面 $I\!P$ 中的線段長 $\overline{OQ} = \alpha * R$, 被加了撇的世界 $I\!P'$ 中的線段長 $\overline{O'Q'}$ 模擬了。

以我們現在所討論的例子來說, 我們是取了 $\alpha \equiv |\overline{OQ}| \div |\overline{OP}| \equiv 2.4$ 來畫圖的。所以我們的標示, 可以是 (如圖所寫的)

$$\overline{OQ} \equiv \alpha * R (\equiv 1.53072 * 10^7 \text{米});$$

也可以是[15] (更常見的寫法!)

$$\overline{OP_1} \equiv (R =) 6.378 * 10^6 \text{米}。$$

1.3. 圖解引潮力

[**物理向量的圖解: 方向與尺度**]: 回到原來的問題: 如何圖解引潮力 (62)

$$\mathbf{f}(P) = \mathfrak{g}(P) - \mathfrak{g}(O)?$$

問題的前半是:「兩個向量 $\mathfrak{g}(P)$ 與 $\mathfrak{g}(O)$, 個別地說, 要如何圖解?」
後半則是:「如何 (由這兩個向量去) 做加 (減) 法的圖解?」

先說前半。古時學者 (如 S. Stevinus) 掌握到「力是向量」時, 已經知道這樣的圖解法的意義了: 基本上, 向量是要用一個有向線段來 代表 的!

所以我們是要在這個紙面 $I\!P'$ 上, 適當地找到兩點, (暫時記爲) U, V, 用有向線段 $\overrightarrow{UV}$ 來代表 $\mathfrak{g}(P)$, 我們就寫成

$$\overrightarrow{UV} \propto \mathfrak{g}(P); \tag{68}$$

向量是有方向與大小的量。上面這個式子的意思就是說:

就方向而言, 上式的左右側的方向 (狹義地) 相同

$$\text{sgn}(\overrightarrow{UV}) = \text{sgn}(\mathfrak{g}(P)); \tag{69}$$

---

[15]但是, 只准寫一個! 因爲, 原則上, α 是可以由實測的 $|\overline{OQ}|$ 與 $|\overline{OP}|$ 而算出來的。寫了兩個, 就等於規定 $g = 9.8$ SI., 然後又規定 $g = 10.0$, 那就讓人莫知所從了。

就大小而言, 上式的左右側的大小, 也是成比例的

$$|\overrightarrow{UV}| \propto |\mathfrak{g}(P)|. \tag{70}$$

同樣地, 我們又必須適當地找到兩點, (暫時記爲) U_0, V_0, 用有向線段 $\overrightarrow{U_0V_0}$ 來代表 $\mathfrak{g}(O)$, 也就是說:

$$\overrightarrow{U_0V_0} \propto \mathfrak{g}(O); \qquad (68' =) \tag{71}$$

而上面這個式子的意思就是說: 不但有 (如同 (69) 式的)

$$\mathrm{sgn}(\overrightarrow{U_0V_0}) = \mathrm{sgn}(\mathfrak{g}(O)); \tag{69'}$$

而且有 (如同 (70) 式的)

$$|\overrightarrow{U_0V_0}| \propto |\mathfrak{g}(O)|; \tag{70'}$$

上述的 (68) 式 $\cong$ (69) 式 + (70) 式, 及 (71) 式 $\equiv$ (68′) 式 $\cong$ (69′) 式 + (70′) 式, 都是有兩個面向, 一是關於方向的, 一是關於大小的。

- 關於方向的, 即 (69) 式及 (69’) 式, 很容易解決! 事實上, 只要[16]讓兩點 U, V 就都在直線 PQ 上, (69) 式就成立; 同樣地, 只要讓[17]兩點 U_0, V_0 在直線 OQ 上, (69’) 式也就成立。在此, 兩個式子 (69) 式及 (69′) 式, 互不相干!
- 關於大小的, 即 (70) 式, 及 (70′) 式, 卻必須合併起來讀, 而解釋成[18]:

$$\frac{|\overline{UV}|}{|\mathfrak{g}(P)|} = \frac{|\overline{U_0V_0}|}{|\mathfrak{g}(O)|}; \tag{73}$$

這個比例, 就是在這個向量圖解法之中的 尺度換算比。當 O 與 P 已經確定時, 兩個線段長 $\overline{UV}$ 與 $\overline{U_0V_0}$ 的比, 已經確定, 那麼, 這兩個線段長之中, 一個自由, 另一個不自由。

我們在此就取定

$$U_0 \equiv O, V_0 \equiv Q.$$

因而確定了 (71) 式, 也就是

$$\overrightarrow{OQ} \propto \mathfrak{g}(O). \tag{74}$$

我們必須在紙面 $\mathbb{P}'$ 的適當的空白處, 顯示出 (73) 式這個 比例尺度

$$\overline{OQ} \equiv \frac{\beta}{\alpha^2} * g = \mathfrak{g}(O). \tag{75}$$

---

[16]當然還要注意‘正負號’: 要讓, 由 U 向 V, 等於由 P 向 Q。

[17]當然還要注意‘正負號’: 要讓, 由 U_0 向 V_0, 等於由 O 向 Q。

[18]或者寫成

$$|\overrightarrow{UV}| : |\overrightarrow{U_0V_0}| \equiv |\mathfrak{g}(P)| : |\mathfrak{g}(O)|. \tag{72}$$

這樣寫的好處是: 讓上式的左側是線段長度相除, 右側是除權力之大小相除, 都得到無量綱的純實數。

關鍵性的思考是: 爲什麼一張紙上可以出現兩個 不同的 比例尺度標示?

這是因爲: 兩個 不同的比例尺度, 分別用於兩種 不同的物理量度, 用於不同的量綱, 一個是'長度', 一個是' (除權) 力' (即加速度)。

選定了 (74) 式之後, 對於 $\mathbb{S}_1$ 上的點 P, 要代表 $\mathfrak{g}(P)$ 的有向線段 $\overrightarrow{UV}$, 其 長度就沒有自由了。(必須滿足 (72) 式。) 其 方向 本來就需要滿足 (69) 式。所以要確定這個有向線段, 就只需要擇定其一端。我們這裡就選定:

$$\text{終端點} \qquad V \equiv V_0 \equiv Q.$$

理由就是下述的 銜接性。

[**物理向量加法的圖解**]: 有了以上這樣的理解之後, 我們就可以把 Stevinus 的
力量的加法之三角形定律, 用到我們這個引潮力的圖解問題來!

現在, $\mathbf{f}(P) = \mathfrak{g}(P) + (-\mathfrak{g}(O))$ 是兩個除權的力 $\mathfrak{g}(P)$ 與 $(-\mathfrak{g}(O))$ 相加,

假定: 前一項是用有向線段 $\overrightarrow{UV}$ 代表, 如 (68) 式, 後一項則是, 將 (71) 式變號, 用有向線段 $\overrightarrow{V_0U_0} \equiv \overrightarrow{QO}$ 代表:

$$\overrightarrow{V_0U_0} \propto (-\mathfrak{g}(O)). \tag{76}$$

Stevinus 說: 只要讓前一個有向線段 $\overrightarrow{UV}$ 的終端 V 與後一個有向線段 $\overrightarrow{V_0U_0}$ 的始端 V_0 重合, (即: 這兩個有向線段前後 銜接,)

$$V_0 \equiv V,$$

然則, 這兩個線段, $\overline{UV}$ 與 $\overline{V_0U_0}$, 就是單獨一個三角形 $\triangle UVU_0$ 的兩邊。而 第三邊是 $\overline{UU_0}$, 是由 ($\overrightarrow{UV}$ 的始端) U 連結到 ($\overrightarrow{V_0U_0}$ 的終端) U_0 的線段。那麼, (將 (68) 式與 (76) 式相加!) 有向線段 $\overrightarrow{UU_0}$ 就代表了這兩項 相加的結果:

$$\overrightarrow{UU_0} \propto (\mathfrak{g}(P) + (-\mathfrak{g}(O))) \equiv \mathbf{f}(P). \tag{77}$$

[**圖解** $\mathfrak{g}(O)$]: 現在要找出代表 $\mathfrak{g}(O)$ 的有向線段 $\overrightarrow{UV}$ 如 (68) 式。我們已確定要讓兩端點 U, V 就都在直線 PQ 上, 而且由於 銜接性: $V = V_0 \equiv Q$, 只需要知道線段長度[19] $\overline{UV}$, 就可以找出 開端 U 了。

以下, 爲了後述作圖題中標記的明辨, 我們把 U 改寫爲 T。於是, 總而言之, 引潮力 $\mathbf{f}(P)$ 的圖解法, 就歸結到如下這個

[19]這句話稍有語病: 因爲距離是絕對值, 我們還需要考慮正負號, 也就是 U 在直線 PQ 上的哪個方向上。但因爲 $\mathfrak{g}(P)$ 的方向是由 P 向 Q, 所以 U 必定是在由 Q 向 P 的半線上。

[**平面幾何作圖題**]: 已給了: 圓心 O, 半徑 R 的一圓 $\mathbb{S}_1$, 及圓 (盤) 外一點 Q。任意取一點 $P \in \mathbb{S}_1$, 請畫圖找出半線 QP 上的一點 T, 使得:

$$\overline{QT} : \overline{QO} = \overline{QO}^2 : \overline{QP}^2. \tag{78}$$

[**補助命題**]: 任給了平面上的'四'點 K, L, M, N, 而 K 與後三點相異, 那麼, 只用 希臘規矩, 就可以找到半線 KN 上 (唯一的一點) I, 使得:

$$\overline{KI} : \overline{KL} = \overline{KM} : \overline{KN};$$

也可以找到半線 KM 上 (唯一的一點) J, 使得:

$$\overline{KJ} : \overline{KL} = \overline{KM} : \overline{KN}.$$

[**作圖題的解法**]: 我們利用這個補題, 先 對於'四'點 Q, O, O, P, 在 QP 半線上, 找到點 $Z \neq P$, 使得:

$$(i :) \quad \overline{QZ} : \overline{QO} = \overline{QO} : \overline{QP}.$$

再 對於'四'點 Q, O, Z, P, 在 QZ 半線 $(= QP$ 半線) 上, 找到點 T, 使得:

$$\overline{QT} : \overline{QO} = \overline{QZ} : \overline{QP}; \quad \text{即} \quad (ii :) \quad \overline{QT} : \overline{QZ} = \overline{QO} : \overline{QP};$$

於是 $(i), (ii)$ 兩式相乘而得 (參見 (78) 式):

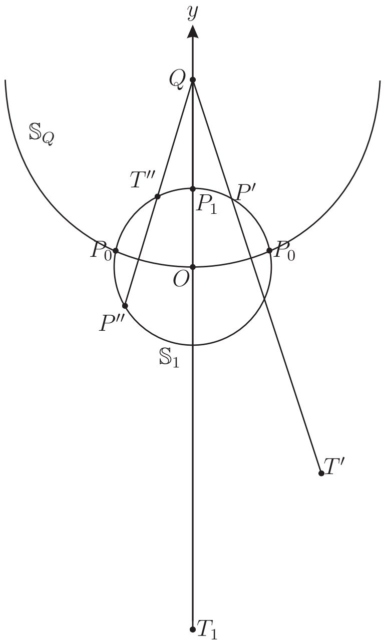
$$\overline{TQ} : \overline{OQ} = \overline{QO}^2 : \overline{QP}^2 = |\mathfrak{g}(P)| : |\mathfrak{g}(O)|.$$

[**圖解法的總結**]: 這就證明了, 在我們的圖解法中:

$$\begin{aligned} &(\heartsuit :)\ \overrightarrow{TQ} \propto \mathfrak{g}(P);\\ &(\diamondsuit :)\ \overrightarrow{QO} \propto (-\mathfrak{g}(O));\text{因而}\\ &(\clubsuit :)\ \overrightarrow{TO} \propto \mathbf{f}(P) \equiv \mathfrak{g}(P) - \mathfrak{g}(O).\\ \text{問題在}\quad &(\spadesuit :)\ \overrightarrow{OP} \parallel \overline{TO}. \end{aligned}$$

注意到: 動影點 T 會隨著地圓 $\mathbb{S}_1$ 上的動點 P 而變。

如何找出這樣子配合的點 P 與 T ?



$$\frac{\overline{TQ}}{\overline{OQ}} = \left(\frac{QO}{QP}\right)$$

比例尺度

長度: $\overline{OQ} \equiv \alpha * R$

加速度: $|\overrightarrow{OQ}| \equiv \frac{\beta}{\alpha^2} * g$

現在 (如上圖,) 以 Q 爲圓心, $\overline{QO}$ 爲半徑, 畫圓 $\mathbb{S}_Q$。

於是, 由於平方反比定律 (78) 式, 當 P 在圓 $\mathbb{S}_Q$ 內, 如圖中的 P', 則其影點 T 在圓 $\mathbb{S}_Q$ 外, 如圖中的 T'; 當 P 在圓 $\mathbb{S}_Q$ 外, 如圖中的 P'', 則其影點 T 在圓 $\mathbb{S}_Q$ 內, 如圖中的 T''。圖中有畫出近星點 P_1 及其影點 T_1, 但是沒畫出遠星點 P_2 及其影。

點 T 與點 P 重合時, 就只有在兩圓 $\mathbb{S}_1$ 與 $\mathbb{S}_Q$ 的交點 P_0 處。

1.4. 引潮力的固有點

所以, 我們這個圖解法, 已經解決了上面提到的固有問題 (63) 式

$$(\spadesuit :) \quad \mathbf{f}(P) = \lambda * \mathrm{sgn}(\overrightarrow{OP}).$$

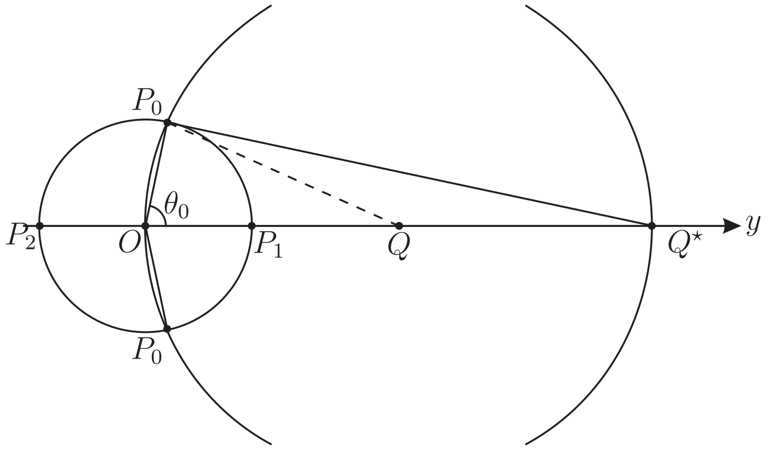
由於 ($\clubsuit$), 這式子的解釋是: O, T, P 三點共線。但是, 依照我們的建構, ($\heartsuit$), $\overrightarrow{TQ} \parallel \overrightarrow{PQ}$, 故 Q, P, T 三點共線。

所以, 有一種情況是: $T \neq P$, 而 Q, O, P, T 四點共線, P 在 $\overline{OQ}$ 上。那麼 P 就只能是近日點 P_1 或者遠日點 P_2 (即: 特異的固有點); 另一種情況是: $T = P$. 這就是上述的狀況: P 是 $\mathbb{S}_Q$ 與 $\mathbb{S}_1$ 的交點 P_0。

此時, $\overrightarrow{TO} = -\overrightarrow{OP_0}$, 而且 $\overline{TO} : \overline{OQ} = 1 : \alpha$, 換算成 $|\mathbf{f}(P_0)| = \frac{1}{\alpha} * \frac{\beta}{\alpha^2} * g$, 就得到固有值 $\lambda_0 = \frac{-1}{\alpha} * \frac{\beta}{\alpha^2} * g$。

固有餘緯度 $\theta_0 = \angle QOP_0$ 是等腰三角形 $\triangle QOP_0$ 的底角 (如下圖), 這個等腰三角形的腰與底邊的長度之比爲 $\alpha : 1$

(依三角學, $\theta_0 = \arccos(\frac{1}{2*\alpha})$。)



[**固有值的比較**]: 現在我們設置一個正實值 狹義凸性且遞降 的函數

$$h(x) := \frac{g\beta}{x^2}.$$

把這個 $\lambda_0 = \frac{-\beta g}{\alpha^3}$ 的 負的兩倍, 以及 (66) 式的那兩個固有值, 表達爲

$$\begin{aligned} \lambda_1 = h(\alpha-1) - h(\alpha) &= g\beta * \left(\tfrac{2\alpha-1}{(\alpha-1)^2\alpha^2}\right); \\ \lambda_2 = h(\alpha) - h(\alpha+1) &= g\beta * \left(\tfrac{2\alpha+1}{(\alpha+1)^2\alpha^2}\right); \\ (-2\lambda_0) = -h'(\alpha) \qquad\qquad &= g\beta * \left(\tfrac{2}{\alpha^3}\right); \end{aligned} \tag{79}$$

就得到:

$$\lambda_1 \gtrapprox (-2\lambda_0) = \frac{2\beta}{\alpha^3} g \gtrapprox \lambda_2 > 0; \tag{80}$$

由固有值的正負號來談, 近月點 P_1 與遠月點 P_2 都是 揚潮點, 因爲此兩地的引潮力, 都是揚昇 (離開地心) 的; 而所有的 P_0 都是 陷潮點, 因爲其處的引潮力都是陷降 (向著地心) 的。揚昇的大小, 差不多是陷降的 兩倍。(以 $\alpha \gg 1$ 來考慮。)

2. 引潮力的位勢場

[**問題**]: 求: 在地球表面 $\mathbb{S}$ 上的一條路徑 (或即 有號 (oriented) 平滑的曲線) Γ, 使得, 引潮力場 $\mathbf{f}$ 沿著它的 循線積分

$$\mathcal{P}(\Gamma) := \int_\Gamma \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \tag{81}$$

有極大值。

照定義, 把路徑 Γ 反號 (reverse the orientation), 就會讓這個 泛函 (functional) 反號:

$$\mathcal{P}(-\Gamma) \equiv (-1) * \int_\Gamma \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}. \tag{82}$$

因此, 泛函的極大問題的解答, 反號之後, 自動就是極小問題的解答。

解法很簡單! 這個引潮力向量場是 保守的 (conservative), 也就是說: 存在一個標量的 (scalar) 場 Φ, 使得:

$$\mathbf{f}(x,y,z) = -\nabla\Phi(x,y,z); \quad \text{此地 梯度算子} \quad \nabla \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{83}$$

這個場 Φ, 如果存在, 那就幾乎是唯一的: 最多只會相差一個積分常數。

我們稱它爲星球在地球 $I\!\!B$ 上的 引潮力位勢, 由 (57) 式及上式, 就得知

$$\Phi(\mathbf{x}) := GW\left(\frac{y}{|\mathfrak{x}_B - \mathbf{x}_A|^2} - \frac{1}{|\mathfrak{x}_B - \mathbf{x}|}\right). \tag{84}$$

根據向量分析中的 梯度積分定理, 若路徑 Γ 的起端爲 P_a, 終端爲 P_b, 則:

$$\int_\Gamma \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \Phi(P_a) - \Phi(P_b). \tag{85}$$

泛函 $\mathcal{P}(\Gamma)$ 的極大問題, 變成 兩點函數 的極大問題:

「求 $\mathbb{S}$ 上的兩點 P_a 與 P_b, 使得: 上式右側爲極大」。換句話說: 求函數 Φ 在 $\mathbb{S}$ 上的極大點 P_a 與極小點 P_b, 使得:

$$\text{對於一切 } \mathbf{x} \in \mathbb{S}, \ \Phi(P_b) \le \Phi(\mathbf{x}) \le \Phi(P_a). \tag{86}$$

因爲 $\mathbb{S}$ 是個無邊緣的曲面, 極大點 P_a 也好, 極小點 P_b 也好, 都必然是 Φ 在 $\mathbb{S}$ 上的臨界點[20]。

問題變成:「找出所有的 Φ 的臨界點」。

這個微分學的問題, 有兩種常見的解法。

---

[20]於此點, Φ 在任何方向上的導數 (directional derivative) 恆爲零。

- 把函數 Φ 的定義域擴張爲遮住 $\mathbb{B}$ 的一個開領域。則 $\mathbb{S}$ 只是其內的一個無邊緣的曲面, 那麼, 根據 Lagrange 的處方, 上述的臨界點就是指這樣的點 $P\in\mathbb{S}$, 讓 Φ 在此處的梯度 $\nabla\Phi(P)=-\mathbf{f}(P)$ 與 $\mathbb{S}$ 的切面垂直, 換句話說: $-\mathbf{f}(P)\parallel\overrightarrow{OP}$。臨界點 $P\in\mathbb{S}$ 就是引潮力場的固有點! 這是上一節已經處理過的。
- 純粹就限制在 $\mathbb{S}$ 上, 找出函數 Φ 的極值點。那麼, 最簡單的辦法就是: 在二維的球面上, 採用 指向此星 B 的 球極坐標系 (θ,φ), 此即[21]:

$$y\equiv R\cos(\theta), x\equiv R\sin(\theta)*\cos(\varphi), z\equiv R\sin(\theta)*\sin(\varphi); \tag{87}$$

這裡 $\theta:=\angle QOP$ 是 P 點的 (對星球 B 的) 餘緯度 (co-latitude)[22]。而 φ 是 P 點的 (對星球 B 的) 經度, 而以 2π 爲週期, 並無邊緣點。

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z)&\equiv\frac{-GW}{\sqrt{(y-\alpha R)^2+x^2+z^2}}+\frac{GW}{(\alpha R)^2}*y\\&\equiv g\beta R\left(\frac{-1}{\sqrt{\alpha^2+1-2\alpha\cos(\theta)}}+\frac{\cos(\theta)}{\alpha^2}\right).\end{aligned} \tag{88}$$

[**臨界的 (對星) 餘緯度**]: 讓我們思考在閉區間 $0\le\theta\le\pi$ 上的函數

$$V(\theta)\equiv\frac{-1}{\sqrt{\alpha^2+1-2\alpha\cos(\theta)}}+\frac{\cos(\theta)}{\alpha^2}$$

的極值問題:

$$\min_{0\le\theta\le\pi}V(\theta)=? \qquad \max_{0\le\theta\le\pi}V(\theta)=?$$

令 $\eta\equiv\cos(\theta)$, 則問題變成閉區間 $1\ge\eta\ge-1$ 上的函數

$$\tilde{V}(\eta)\equiv\frac{-1}{\sqrt{\alpha^2+1-2\alpha\eta}}+\frac{\eta}{\alpha^2}$$

的極值問題:

$$\min_{-1\le\eta\le1}\tilde{V}(\eta)=? \quad \max_{-1\le\eta\le1}\tilde{V}(\eta)=?$$

此時, 極值點的候補者, 除了兩個端點 $\eta_1=1$ 與 $\eta_2=-1$ 之外, 就是函數 $\tilde{V}$ 的臨界點。因爲導函數

$$\tilde{V}'(\eta)=\frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1-2\alpha\eta}^3}+\frac{1}{\alpha^2}$$

所以 $\tilde{V}'(\eta)=0$ 的唯一解, 就是

$$\eta\equiv\frac{1}{2\alpha}.$$

[21] 唯一的抱歉是: 極軸是 y 軸, (或者 $\mathbf{j}$ 軸), 因爲被 莫文綁住了。

[22] 其範圍是 $0\le\theta\le\pi$; 兩個端點 $\theta_1=0$ 與 $\theta_2=\pi$ 永遠需要特別考慮!

因此函數 V 唯一的 臨界點 (critical point) 就是

$$\theta_0 \equiv \arccos\left(\frac{1}{2\alpha}\right).$$

以上兩種解法當然得到相同的答案。

現在接續剛剛的計算, 對於臨界點 θ_0 與兩端點 $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, 計算 V 的函數值, 就得到:

$$V(0) = \frac{-1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha^2}; V(\pi) = \frac{-1}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha^2}; V(\theta_0) = \frac{1 - 2\alpha^2}{2\alpha^3}.$$

因爲 $V(\theta_0) > V(\pi) > V(0)$, 所以 V 的極大點是 $\theta_0 = \arccos(\frac{1}{2\alpha})$, 而極小點是 $\theta_1 = 0$, 不是 $\theta_2 = \pi$。

總之: (81) 式泛函極大問題的 最佳 (optimal) 路徑 Γ_0, 就是要: 讓路徑 Γ_0 的起端是上面算出的 P_0, 具有臨界的 (對星) 餘緯度[23] $\theta = \theta_0$, 而終端是近星點 $P_1 = (0, R, 0)$。(唯一!)

如此所得的 (引潮力位勢差) 泛函的極大值, 就是 莫文 所說的近星點的靜水壓力

$$\mathcal{P}(\Gamma_0) = gR\beta * \left((\frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}) - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha^3} \right) = gR\beta * \frac{3\alpha - 1}{2\alpha^3(\alpha - 1)}. \tag{89}$$

3. 討論

事實上, 我們心目中只在意兩個案例: B =月球 (moon) 或日球 (sun)。那麼, 採用簡化方便的數據, 我們將設定: 日地距 (所謂 天文單位 =A.U.) $\approx 1.501 * 10^{11}$米; 也就是 $\alpha_s \approx 23456$; 日球的質量 $W_s \approx 1.989 * 10^{30}$公斤; 也就是 $\beta_s \approx 10^6/3$; 月地距 $\approx 3.84 * 10^8$米; 也就是 $\alpha_m \approx 60$; 月球的質量 $W_m \approx 7.3753 * 10^{22}$公斤; 也就是 $\beta_m \approx \frac{1}{81}$。

於是我們將把這兩個案例的數據, 代入 7 $(= 3 + 3 + 1)$ 個公式, 就三個地點 $P_k, (k = 0, 1, 2,)$, 計算 (B 所生的) 引力 $|\mathfrak{g}(P_k)|$; 引潮力 $|\mathbf{f}(P_k)| = |\lambda_k|$, 然後再計算 $\mathcal{P}(\Gamma_0)$。我們先看月球 $B = B_m$。

依照引力 $|\mathfrak{g}(P_k)|$ 的公式 (58), (65), 有

$$|\mathfrak{g}(P_1)| = \frac{\beta g}{(\alpha - 1)^2} > |\mathfrak{g}(P_0)| = \frac{\beta g}{\alpha^2} > |\mathfrak{g}(P_2)| = \frac{\beta g}{(\alpha + 1)^2}; \tag{90}$$

因此我把計算的結果, (用國際單位,) 就橫排成一列, 也把 莫文 p.28 (8) 式以下的前 三個數據, 並列在其下, 以供對照。

	$\lvert\mathfrak{g}(P_1)\rvert$	$\lvert\mathfrak{g}(P_0)\rvert$	$\lvert\mathfrak{g}(P_2)\rvert$
本文	$3.476 * 10^{-5}$	$3.361 * 10^{-5}$	$3.251 * 10^{-5}$
莫文	$3.597 * 10^{-5}$	$3.476 * 10^{-5}$	$3.361 * 10^{-5}$

(91)

[23] 但經度 φ 隨意而不唯一! 當經度 φ 繞了一週角時, P_0 就在 ($\mathbb{S}$ 的) 臨界緯線上繞一圈。

所用的公式相同 (!) 答案當然應該相同 (?)

哈哈! 差別就在於: 我用 $\alpha = \alpha_m \equiv 60$, 他用 $\alpha = 59$。

所以我的 $|\mathfrak{g}(P_0)|$ 是他的 $|\mathfrak{g}(P_2)|$; 而我的 $|\mathfrak{g}(P_1)|$ 是他的 $|\mathfrak{g}(P_0)|$。

[**月球對地表的 (固有) 引潮力 之估算**]: 我們根據公式 (79) 計算出來的結果[24], 就列在下面。也把 莫文 p.28 的後面 兩個數據, 並列對照。

請特別注意到 (參見 (80) 式,) 固有陷潮力 $\mathbf{f}(P_0)$ 之大小, 即 $|\mathbf{f}(P_0)| = -\lambda_0$, 而且其兩倍, 就是介於兩個 特異固有值 之間。所以才有表中的因子 (-2)。

而且這樣一來, 這個表就與上面這個表, 有顯然的對比!

	$\lvert\mathbf{f}(P_1)\rvert = \lambda_1$	$2 * \lvert\mathbf{f}(P_0)\rvert = -2\lambda_0$	$\lvert\mathbf{f}(P_2)\rvert = \lambda_2$
本文	$1.149 * 10^{-6}$	$1.120 * 10^{-6}$	$1.093 * 10^{-6}$
莫文	$1.21 * 10^{-6}$	(??)	$1.15 * 10^{-6}$

(92)

除了表中 莫文出現的空白問號之外, 莫文所給的這兩個數據, 其實就是遵照此地的公式。只是 莫文用 $\alpha_m = 59$, 而我們用 $\alpha_m = 60$。

為什麼 莫文出現了空白? 這是因為 莫文對於引潮力所給的定義, 不夠周全。

莫文[25]把引潮力記為 $F_m(\mathbf{x})$, (其中 $\mathbf{x} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{S}$, 或者 $I\!B$ 也可以!) 定義成

$$F_m(\mathbf{x}) := \operatorname{sgn}(y) * \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{93}$$

切記: 莫文的 y 軸是由 O 指向 Q, 即: $\mathbf{j} := \operatorname{sgn}(\overline{OQ})$。所以, 對於 $P_1 \equiv (0, R, 0), P_2 \equiv (0, -R, 0)$ 這兩個固有點 $P_j, (j = 1, 2)$ 來說, 當然是:

$$\begin{aligned} F_m(P_1) &\equiv \qquad\quad \mathbf{f}(P_1) = \lambda_1 * \mathbf{j}; \\ F_m(P_2) &\equiv (-1) * \mathbf{f}(P_2) = -\lambda_2 * (-\mathbf{j}) = \lambda_2 * \mathbf{j}. \end{aligned}$$

莫文 的定義, 主要的目的似乎就是要讓這兩個特異的引潮力固有點 (即近月點與遠月點) P_1, P_2 處的'引潮力'的值, 同號。所以他們才在定義式中, 引入這個因子 $\operatorname{sgn}(y)$。這個因子, 讓他們與我們的引潮力在近月點 P_1 處完全一致; 但是在遠月點 P_2 處差個負號。注意到他們定義的引潮力場 F_m, 在有定義且不是零值處, 與我們定義的引潮力場 $\mathbf{f}$, 都有相同的絕對值, (其實, 最多只差個正負號,) 既然我們定義的引潮力場 $\mathbf{f}$, 在 $\mathbb{S}$ 上, (其實是在 $I\!B$ 上) 處處有定義而且連續, 那麼, 當動點 $\mathbf{x}$ 沿著任何一條 (對月的!) 經線, 由 P_1 走向 P_2 時, 必定要經過某個零值點 $F_m(\mathbf{x}) = 0 = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, 或者是 F_m 的不連續的 跳躍 點。事實上, 他們根本就對於

[24]用國際單位。

[25]這是在其 p.28 幾乎中間的位置。

$y=0$ 這條曲線[26] 上的點 $\mathbf{x}$, 不去定義 $F_m(\mathbf{x})$。此地定義式 (93) 中的 $\mathrm{sgn}(y)$ 這個因子, 其實是我們幫忙加上去的。

在 莫文中, (p.30-p.31, (9-12) 諸式,) 一再地出現 $y=y_0\equiv\frac{R}{118}$, 那其實[27]就是 $y_0=\frac{R}{2\alpha}$, 也就是我們此處所說的固有陷潮點的, (對月的) 緯線。

如果 莫文 中有完整的引潮力場的概念, 應該就會去想要定義我們這裡所說的
引潮力的固有點, 引潮力的固有值等等吧。

[**近月點的靜水壓力之估算**]: 現在考慮 $\mathcal{P}(\Gamma_0)$ 如 (89) 式。我先算出來

$$\frac{3\alpha-1}{2\alpha^3(\alpha-1)}\approx 7.0229*10^{-6},$$

於是

$$\mathcal{P}(\Gamma_0)\approx 0.5523*g\approx 5.4193. \tag{94}$$

以上是用我的 $\alpha=60, R=6.378*10^6$, 如果用他們的 $\alpha=59, R=6.560*10^6$, 所得到的將是

$$\begin{aligned}\tfrac{3\alpha-1}{2\alpha^3(\alpha-1)}&\approx 7.38752*10^{-6};\\ \mathcal{P}(\Gamma_0)&\approx 7.38752*10^{-6}*g\beta R\approx 0.5983*g\approx 5.8633.\end{aligned}$$

現在看莫文怎麼計算。他們把循線積分 (81) 式, 用近似積分[28]

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Gamma_0)&\approx \textstyle\int_{y_0}^R|\mathbf{f}(\mathbf{x})|dy\equiv(\beta g)*\int_{y_0}^R dy\left(\frac{1}{\alpha^2+1-2\alpha\frac{y}{R}}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\\ &=g*\beta R\left(\tfrac{1}{\alpha}\ln(\tfrac{\alpha}{\alpha-1})-\tfrac{1}{\alpha^2}(1-\tfrac{1}{2\alpha})\right)\\ &\approx 4.89691*10^{-6}*g*\beta R\\ &\approx 3.8866.\end{aligned}$$

最後的答案在 莫文 p.31 的最下面。這樣的近似積分, 顯得低估, 誤差太大了。

現在考慮 $B=$ 日球。我們看看日球所生於地球 $\mathbb{B}$ 上的引力場 $\mathfrak{G}(\mathbf{x})$。

我們看 (90) 式的三個'力', 它們變化的幅度, 相對於中央值來比, 就是

$$\frac{|\mathfrak{g}(P_1)|-|\mathfrak{g}(P_2)|}{|\mathfrak{g}(O)|}\approx\frac{4}{\alpha}.$$

對於 $\alpha_s=23456$ 來說, 約爲 $\frac{4}{\alpha_s}=\frac{1}{5864}$。太小了! 這和月球的情況 $\frac{4}{\alpha_m}=\frac{1}{15}$ 大不相同, 彼時三個力需要分別估算, 而現在我們只要計算一個。我們就計算中間那一個:

$$\mathfrak{g}(O)\equiv\frac{\beta_s}{\alpha_s^2}g\approx 6.059*10^{-4}*g\approx 5.94*10^{-3}.$$

---

[26]這是對於星球 B 而言的 赤道。

[27]因爲 莫文 採用的數據是 $\alpha\equiv 59$。

[28]莫文p.31, (11-12) 式。

- 日球的引'力'與 g 相比, 只有 $\frac{\beta_s}{\alpha_s^2} \approx \frac{1}{1651}$, 很小;
- 月球的引'力' 與 g 相比, 只有 $\frac{\beta_m}{\alpha_m^2} \approx \frac{1}{2.916*10^5}$, 更小;
- 事實上, 月球引力只有日球引力的 $\frac{(\beta_m/\beta_s)}{(\alpha_m/\alpha_s)^2} \approx \frac{1}{177}$, (接近但) 不到 0.006。

現在看看日球所生於地球 $\mathbb{B}$ 上的引潮力場 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, 或者說, 我們把 (80) 式講得更精準些, 利用 (79) 式, 就得到

$$\begin{aligned}\lambda_1 - \lambda_2 &= \frac{2(3\alpha^2-1)}{\alpha^2(\alpha^2-1)^2} \approx \frac{6\beta}{\alpha^4}.\\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{-2\lambda_0} &\approx \frac{3}{\alpha}.\end{aligned} \tag{95}$$

對於日球的引潮力來說, 相對變化幅度, $\frac{3}{\alpha_s} < \frac{1}{8000}$, 是太小了。我們只要計算中間那一個:

$$(-2\lambda_0) = \frac{2\beta_s}{\alpha_s^3} * g \approx 5.166 * 10^{-8} * g \approx 5.0626 * 10^{-7}. \tag{96}$$

那麼, 我們從日月之

$$\text{軌道半徑比} = \frac{\alpha_s}{\alpha_m} \approx 391;$$
$$\text{質量比} = \frac{\beta_s}{\beta_m} \approx 2.7 * 10^7;$$

得到日球對月球之

$$\text{對地引力比} = \frac{\beta_s}{\beta_m} \div (\frac{\alpha_s}{\alpha_m})^2 \approx 176.6;$$
$$\text{引潮力比} = \frac{\beta_s}{\beta_m} \div (\frac{\alpha_s}{\alpha_m})^3 \approx 0.452 \approx \frac{9}{20};$$
$$\text{引潮靜水壓力比} = \frac{\beta_s}{\beta_m} \div (\frac{\alpha_s}{\alpha_m})^3 \approx \frac{9}{20}.$$

極爲有趣的事實是: 雖然對地的引力, 月球不到日球的千分之六, 可是, 對於地球的潮汐之影響, 日球不如月球, 不到一半。大約月球的 $\frac{9}{20}$。

如果考慮的是近星點 (近月點與近日點) 處的引潮力 $\mathbf{f}(P_1)$, 那麼日球大約是月球的 $0.44 \approx \frac{26}{59}$。莫文 p.32 末段的估計則是 $\frac{27}{59}$。

—本文作者爲國立台灣大學數學系退休教授—